

新竹市110學年度國中數學能力競賽 數學百分王 【試題卷】

- 備註：1.根據各題題目中所規定的形式寫出正確答案，並將答案化成最簡分數及最簡根式。
2.請將答案填入【答案卷】正確格子中，每題4分，滿分100分。
3.作答時間：30分鐘。

1. 甲、乙、丙三個人中，一位是歌手，一位是演員，一位是主持人。

三條提示如下：

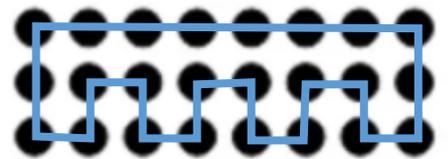
(1) 丙的年齡比演員小。

(2) 甲和主持人的年齡不同。

(3) 主持人的年齡比乙大。

則請問歌手是_____。

2. 有十個不同的正整數，且這十個數的平均為 10，則這十個數字中最大的那個數的最大值為_____。
3. 滿足 $[a, b] = 2021$ 的正整數數對 (a, b) 有_____組。(其中 $[a, b]$ 為 a 、 b 的最小公倍數)
4. 有一個圓形跑道，宮泯、聖經兩人同時從起跑點各自以相等的速率反向跑步。已知宮泯的跑步速率為聖經的 1.4 倍，則兩人再度同時回到起跑點時，已經先相遇過_____次(從起跑點出發那一次不算)。
5. 有一個 3×8 的點陣列，現在用一筆畫的方式(只能是鉛直線或水平線)將這些點全部連接一圈(意即頭尾相接，且每個點只經過一次)。右圖為一個範例。則除了右圖以外，還有_____種畫法。



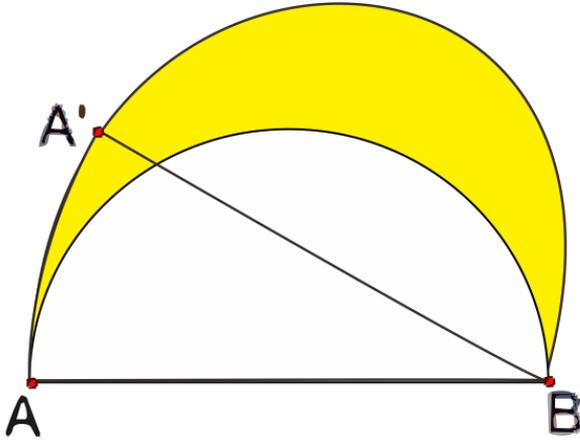
6. 若 $(101 - x)(99 + x) = -25000$ ，則 $\sqrt{(101 - x)^2 + (99 + x)^2} =$ _____

Hint: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

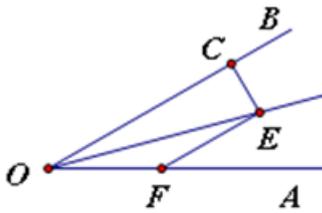
7. 已知實數 x 、 y 滿足方程式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{x+y}$ ，則 $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} =$ _____。

8. 若 a 、 b 均為質數，且 $15a^2 - 8ab + b^2 = 299$ ，則 $3a + b =$ _____。

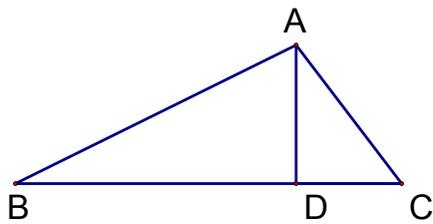
9. 如圖， \overline{AB} 為半圓之直徑，志赫將 \overline{AB} 順時針旋轉 30° 至 $\overline{A'B}$ ，再作出以 $\overline{A'B}$ 為直徑之半圓，且 $\widehat{AA'}$ 是以 B 點為圓心， \overline{AB} 為半徑所畫出的弧。若 $\overline{AB}=8$ ，則灰色面積為_____平方單位。



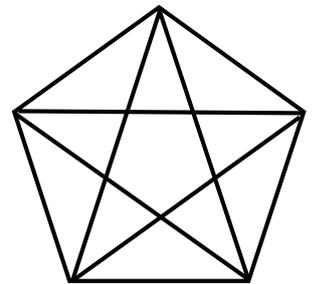
10. 如圖， $\angle AOE = \angle BOE = 15^\circ$ ， $\overline{EF} \parallel \overline{OB}$ ， $\overline{EC} \perp \overline{OB}$ ，若 $\overline{EC} = 2$ ，則 $\overline{EF} =$ _____。



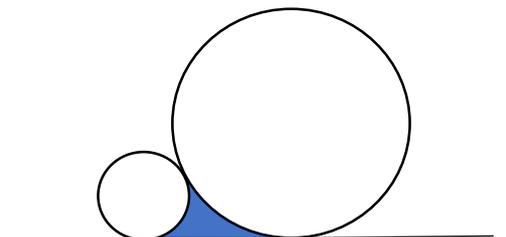
11. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 2\angle B$ 且 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，若 $\overline{AC} = 13$ 、 $\overline{CD} = 5$ ，則 $\overline{AB} =$ _____。



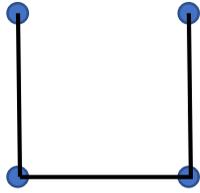
12. 如右圖，將一個正五邊形的對角線全部畫出後，會在內部形成一個小的正五邊形，則大的正五邊形和小的正五邊形邊長的比值為_____。



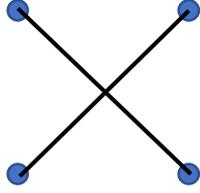
13. 如右圖。大圓與小圓外切，且兩圓的半徑分別為 1 及 3。則此兩圓和其中一條公切線所圍出灰色面積為_____。



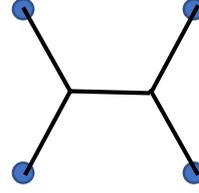
14. 若有甲乙丙丁四地，這四個地方形成一個邊長為 6 公里的正方形，今想修築連接道路，使得這四地可以經由這些道路到任何一個地方。圖一為示意圖，道路總長為 18 公里。但若稍作修改，可以得到一總長度更短的连接方式，如圖二所示，總長度為 $12\sqrt{2}$ 公里。但是事實上，還有一種更短的路徑，如圖三所示，其中每個線段的夾角為 120° ，在此情況之下的總長度為_____公里



圖一



圖二



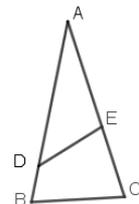
圖三

15. 方垛式四子棋是 A. P. Nienstaedt 在 1968 年推出的連棋類遊戲。如右圖所示，棋盤採用柱狀結構，總共有 4×4 組合的棍子，每根棍子可以串四個棋珠。當有一方的四枚棋珠在三維上，縱、橫、斜方向連成一線時獲勝。場面上總共有六十四個棋珠的位置，請計算一下這些位置可以形成_____條不同的直線。

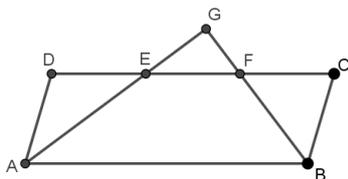


16. 有一長方形長為 8 公分，寬為 4 公分，則將此長方形沿著對角線對折後，重疊部分的三角形面積為_____平方公分。

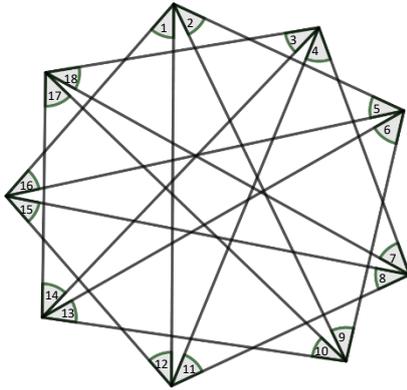
17. 如圖，銳角三角形 ABC 中， $\overline{AD} = 8$ ， $\overline{DB} = 2$ ， $\overline{DE} = 4$ ， $\overline{BC} = 5$ ，且 $\angle AED = 102^\circ$ ， $\angle ADE = 46^\circ$ ，則 $\angle ABC =$ _____度



18. 平行四邊形 $ABCD$ ， \overline{AE} 平分 $\angle BAD$ ， \overline{BF} 平分 $\angle ABC$ ， $\overline{AB} = 3\overline{AD}$ ，若 $\overline{AE} = 8$ ， $\overline{BF} = 6$ ，則平行四邊形 $ABCD$ 的面積為_____。

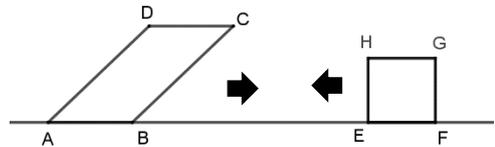


19. 如下圖，請問 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 + \angle 9 + \angle 10 + \angle 11 + \angle 12 + \angle 13 + \angle 14 + \angle 15 + \angle 16 + \angle 17 + \angle 18 =$ _____ 度



20. 平面上有 $A(0,8)$ 、 $B(10,6)$ 、 $C(12,0)$ 及 D 四個點，麻麻與瓜瓜在求 \overline{AC} 與 \overline{BD} 的交點 E 時，瓜瓜誤求成 \overline{AD} 與 \overline{BC} 的交點 $F(4,24)$ ，麻麻誤求成 \overline{AB} 與 \overline{CD} 的交點 $G(40,0)$ ，則正確 \overline{AC} 與 \overline{BD} 的交點 E 座標應為_____。

21. 如圖，在 L 上，有一平行四邊形 $ABCD$ 正在往右平移，以及一正方形 $EFGH$ 正在往左平移，已知 $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{AD} = 15$ ， $\overline{EF} = 8$ ， $\angle A = 45^\circ$ ，則當平行四邊形 $ABCD$ 與正方形 $EFGH$ 重疊面積最大時，重疊面積為_____。



22. $\frac{2021 \times 178 + 110 \times 199}{2021 \times 17 + 110 \times 19}$ 的整數部分為 P_0 ，其小數點後第一位數字是 P_1 ，小數點後第二位數字是 P_2 ，小數點後第三位數字是 P_3 ，.....，則 $P_0 + P_1 + P_2 =$ _____。

23. 求 $\frac{8 \times 4 + 3}{4 \times 3 + 3} \times \frac{16 \times 6 + 3}{12 \times 5 + 3} \times \frac{24 \times 8 + 3}{20 \times 7 + 3} \times \dots \times \frac{100 \times 27 + 3}{96 \times 26 + 3}$ 之值 = _____

24. 某直角三角形之其中兩個高的長度分別 $\sqrt{7}$ 、3，則第三個高的長度可能為_____。
(兩個答案，全對才給分)

25. 小婷想用大小不一的碎紙花拼貼做教室佈置，於是將紙張剪成24張放入盒內，再從中任意取出幾張，取出的每張都剪成24張並放回盒內，再重覆從中任意取出幾張，與前一次的張數不需相同，且取出的每張都剪成24張並放回盒內，一直循環此動作。已知剪完後大小不一的碎紙花張數大約在450~500張，則張數一共有_____張。
(兩個答案，全對才給分)

新竹市110學年度國中數學能力競賽 數學百分王 答案卷

考場： 編號： 姓名：

備註：1.每題4分，滿分100分。2.只須填答案。3.作答時間30分鐘。

4.未使用黑筆或藍筆填答，該張答案卷以0分計算。

1	乙	10	4	19	720
2	55	11	$6\sqrt{13}$	20	(6, 4)
3	9	12	$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$	21	55
4	11	13	$4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi$	22	21
5	7	14	$6 + 6\sqrt{3}$	23	$\frac{53}{3}$
6	300	15	76	24	$\frac{3}{4}\sqrt{7}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{14}$
7	3	16	10	25	461 或 484
8	17	17	70	評分區 以下由閱卷老師填寫	
				初閱成績	複閱成績
9	$\frac{16}{3}\pi$	18	72		

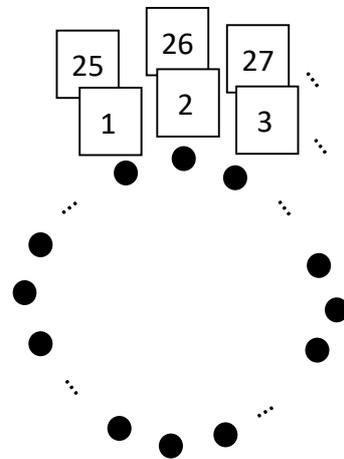
新竹市110學年度國中數學能力競賽 數學達人賽 【試題卷】

- 備註：1. 第一部分為填充題，每題7分，只須填答案，請將答案填入答案卷正確格子內。
 2. 根據各題題目中所規定的形式寫出正確答案，並將答案化成最簡分數及最簡根式。
 3. 第二部分為計算證明題，每題15分，須在答案卷上寫出作答歷程與註明答案。
 4. 「第一部分」和「第二部分」作答時間合計60 分鐘。

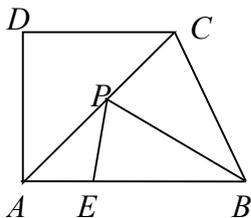
【第一部分】

1. 老師找了 n 個同學(座號分別為 $1、2、3、\dots、n$)，依照座號順時針繞成一圈，從 1 號同學開始順時針發號碼牌，一圈發完就接著再發一圈，直到將 $1\sim 400$ 的號碼牌依順序繞著圈全部發完，若全部發完之後，手中所有牌的號碼總和是 100 的倍數則可以領取精美禮品一份，已知座號 1 號同學，第一張牌拿到 1，第二張牌拿到了 25，請問：哪兩個座號的同學可以拿到精美禮品？

(全對才給分)

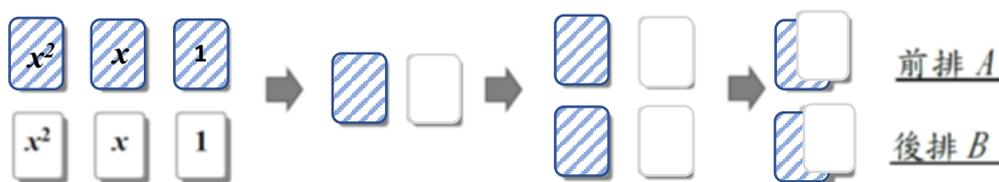


2. 有 $a、b、c$ 三個相異的正整數，已知 $a^2、b^2、c^2$ 成等差數列且 $c-a=12$ ，則此等差數列之公差為_____。
3. 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{CD}\parallel\overline{AB}$ ， $\angle BAD=90^\circ$ ， $\overline{AB}=8$ ，對角線 \overline{AC} 平分 $\angle BAD$ ， E 點在 \overline{AB} 上，且 $\overline{AE}=2$ ($\overline{AE}<\overline{AD}$)， P 點在 \overline{AC} 上任意移動，則 $\overline{PE} + \overline{PB}$ 之最小值為_____。



4. $x^2 + 26x + 1 = 0$ 之兩根為 a 和 b ， $x^2 + 74x + 1 = 0$ 之兩根為 c 和 d ，則 $(a + c)(b + c)(a - d)(b - d) =$ _____。

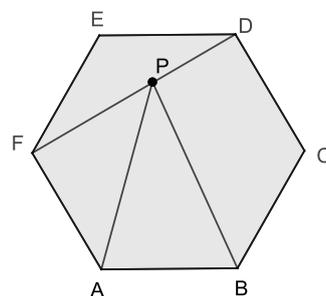
5. 奇勳與尚佑玩預言遊戲，奇勳當預言家，遊戲道具有灰、白兩種卡片各18張，每種色卡分別上寫有 x^2 或 x 或 1 各6張，遊戲方法如下：
 (甲)奇勳請尚佑將灰色卡與白色卡先各別洗牌後分堆放，再各別隨意分成前排、後排兩堆。
 (乙)奇勳再請尚佑將前排的灰、白兩堆色卡組合，得一組多項式 A ；再將後排灰、白兩堆色卡組合，得另一組多項式 B ，過程中只有尚佑知道 $A=4x^2+8x+7$ ， $B=8x^2+4x+5$ 。



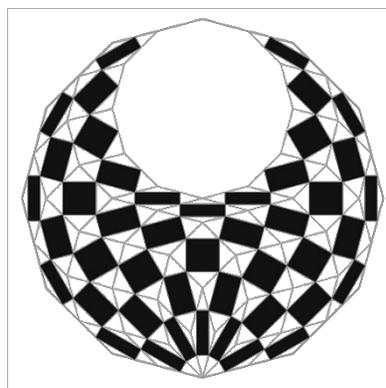
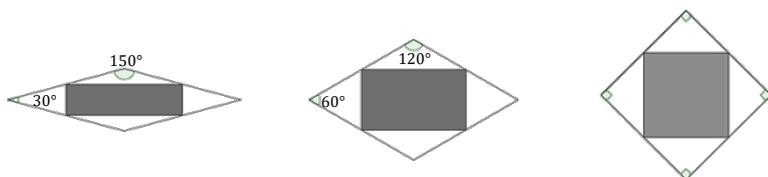
奇勳預言：「讓我們一起見證奇跡！我知道後排白色卡表示的多項式減去前排灰色卡表示的多項式後得到的多項式。」奇勳說出後，尚佑不敢相信奇勳竟然成功預言答案。請問，奇勳預言出來的正確多項式為_____。

6. 已知 $\sqrt{x-110} + \frac{4}{\sqrt{x-110}} + \sqrt{y+110} + \frac{1}{\sqrt{y+110}} = 6$ ，則 $x+y =$ _____。

7. 如右圖， \overline{DF} 為正六邊形 $ABCDEF$ 中的一條對角線。已知此正六邊形的邊長為 2，且 P 點在 \overline{DF} 上，則 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 的最小值為_____。

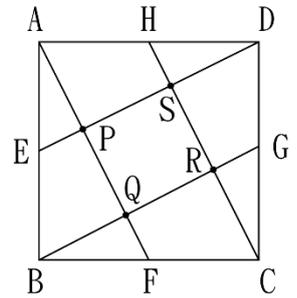


8. 右圖為 2020 年奧運的標誌，其結構是在正 12 邊形內，用下列三種邊長相同的菱形填入，每個菱形的四邊中點連接形成一個塗色的矩形，若此標誌的正 12 邊形邊長為 20 公分時，請問塗色部分面積為 $a + b\sqrt{c}$ 平方公分，則 $a + b + c =$ _____。



9. 一公差為 s 的等差數列 $A_1, A_2, A_3 \dots A_{10}$ ，及另一公差為 t 的等差數列 $B_1, B_2, B_3 \dots B_{10}$ ，兩數列的對應項相乘得到數列 $C_n = A_n \times B_n$ ，若 $C_4 = 24, C_5 = 48, C_6 = 52$ ，請求 s 和 t 的乘積， $st =$ _____。

10. 已知右圖中， E, F, G, H 分別為正方形 $ABCD$ 四邊的中點，又 $\overline{AB} = a$ ，則以 a 表示正方形 $PQRS$ 的面積為 _____



【第二部分】

【題組一】

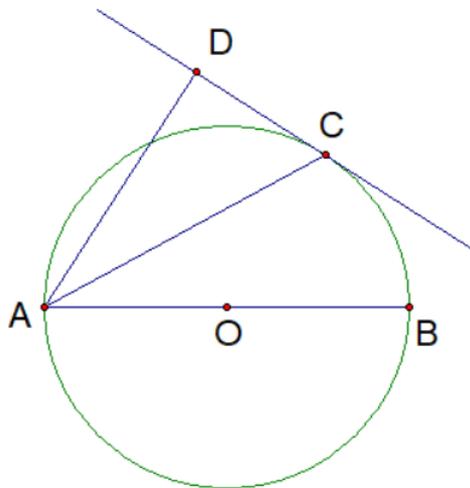
雅米烘焙屋的地瓜麵包每天下午 3 點出爐到 6 點以原價販賣，晚上 6 點到 9 點打烊前以特價出售，隔天早上 7 點後每個麵包再比特價便宜 5 元出清。若漢哲在下午 5 點放學時買了 4 個地瓜麵包和家人分享，意猶未盡，晚上 8 點又買了 5 個當宵夜，比下午少花了 12 元，隔天早上 7 點 20 分上學時，忍不住又買了 6 個當早餐，比宵夜又少花了 2 元，則：

- (1) 若一個麵包原價 x 元，請以 x 表示宵夜時一個麵包的價錢。
- (2) 一個地瓜麵包的原價為多少元？

【題組二】

如圖， \overline{AB} 為圓 O 之直徑，直線 CD 與圓 O 相切於 C 點， $\overline{AD} \perp$ 直線 CD ，則：

- (1) 請以文字或數學式說明 \overline{AC} 平分 $\angle BAD$ 。
- (2) 若 $\overline{AD} = \frac{24}{5}$ ， $\overline{AC} = 6$ ，則 \overline{AB} 長為何？



新竹市110學年度國中數學能力競賽 數學達人賽 第一部分答案卷

考場： 編號： 姓名：

備註：1.第一部分為填充題，只須填答案。

2.「第一部分」和「第二部分」作答時間合計 60 分鐘。

第一部分，每題 7 分			
1	8 號、20 號		
2	96		
3	$2\sqrt{17}$		
4	4800		
5	$2x^2 - 2x - 1$		
6	5	<p style="text-align: center;">評分區</p> <p style="text-align: center;">以下由閱卷老師填寫</p>	
7	$2\sqrt{7}$		
8	1353		
9	-10		
10	$\frac{1}{5}a^2$		

新竹市110學年度國中數學能力競賽 數學達人賽 第二部分答案卷

【題組一】

(1) $\frac{4x-12}{5}$

(2)

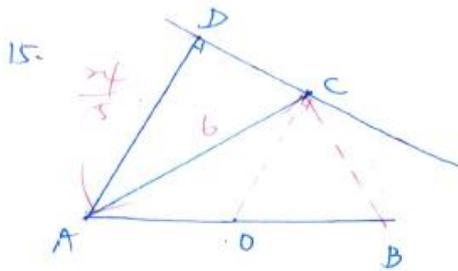
$$\left(\frac{4x-12}{5} - 5\right) \times 6 = 4x - 12 - 2$$

$$\frac{6}{5}(4x - 12) - 30 = (4x - 12) - 2$$

$$\frac{1}{5}(4x - 12) = 28$$

$$x = 38$$

【題組二】



(1) 連接 \overline{OC} $\because C$ 為切點 $\therefore \overline{OC} \perp$ 直線 CD

又 $AD \perp$ 直線 $CD \therefore \overline{OC} \parallel \overline{AD}$

$$\Rightarrow \angle DAC = \angle OCA$$

$$\text{又 } \because \overline{OC} = \overline{OA} \therefore \angle OCA = \angle OAC$$

$$\therefore \angle DAC = \angle OAC$$

即 \overline{AC} 平分 $\angle BAD$

(2) 連接 \overline{BC}

$$\because \triangle ADC \sim \triangle ACB$$

$$\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 6 \times 6 \div \frac{24}{5} = \frac{15}{2}$$